

# 超不連結空間とStone双対性の限界、およびSieveによる層理論の展開

本稿は、トポロジー（空間側）と可換Boole代数（代数側）を結ぶ「Stone双対性」から出発し、超不連結 (extremally disconnected) 空間の圏における「ファイバー積の非存在」という幾何学的危機を提示します。そして、その困難が「篩 (sieve) を用いたGrothendieck位相」の導入によっていかに鮮やかに解決されるか、さらにその背後にある「フレーム上の核 (nucleus)」との完全対応にいたるまでを、自己完結的 (self-contained) に体系化したものです。数学的な定義、定理、およびその完全な証明は「だ・である調」で記述し、直観的な解説や背景思想は「です・ます調」で補足します。

## 1. Stone双対性とGleason被覆：一意性の破綻

位相空間とBoole代数は、完全不連結コンパクトHausdorff空間（Stone空間）を介して双対性で結ばれている。ここでの基本的な対象と圏を設定する。

### 基本概念の定義

- clopen集合 (clopen set):** 位相空間において、開集合でありかつ閉集合でもある部分集合。
- 完全不連結空間 (totally disconnected space):** 任意の異なる2点が、交わらない2つのclopen集合によって分離できる空間。
- 超不連結空間 (extremally disconnected space):** 任意の開集合の閉包が再び開集合（すなわちclopen集合）となる空間。
- TotDCH:** 完全不連結コンパクトHausdorff空間（Stone空間）と連続写像の圏。
- ExtrDCH:** 超不連結コンパクトHausdorff空間と連続写像の圏。
- Bool:** Boole代数とBoole準同型の圏（TotDCHと双対）。
- cBA:** 完備Boole代数の圏（ExtrDCHと双対）。

### 1.1 射影的对象とGleason被覆

位相空間論において、ExtrDCHの対象はコンパクトHausdorff空間の圏における射影的对象 (projective object) である。任意のStone空間  $S \in \text{TotDCH}$  に対し、Gleason被覆 (Gleason cover) と呼ばれる連続全射  $p: E \rightarrow S$  が存在する。ここで  $E \in \text{ExtrDCH}$  であり、 $p$  は既約全射（真の閉部分集合の像が全体にならない全射）である。

射影的对象の性質から、任意の全射  $p: E \rightarrow S$  と連続写像  $f: X \rightarrow S$ （ただし  $X \in \text{ExtrDCH}$ ）に対して、持ち上げ（リフト） $g: X \rightarrow E$  が存在して  $p \circ g = f$  を満たす。しかし、このリフト  $g$  は一般に一意には定まらない。

#### リフトの一意性が破綻する例

$S = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  を自然数集合  $\mathbb{N}$  の1点コンパクト化とする。  $S$  は TotDCH の対象である。  $E = \beta\mathbb{N}$  を  $\mathbb{N}$  のStone-Čechコンパ

クト化とする。 $\beta\mathbb{N}$  は超不連結空間であり、**ExtrDCH** の対象である。

写像  $p: \beta\mathbb{N} \rightarrow S$  を、 $\mathbb{N}$  上では恒等写像とし、成長部  $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  のすべての点を  $\infty$  に潰す連続全射とする。これが  $S$  の Gleason 被覆を与える。

ここで、 $X = \beta\mathbb{N} \in \mathbf{ExtrDCH}$  とし、 $f: X \rightarrow S$  をすべての点を  $\infty$  に写す定数写像とする。持ち上げ  $g: X \rightarrow E$  が  $p \circ g = f$  を満たすためには、任意の  $x \in X$  について  $p(g(x)) = \infty$  であればよい。すなわち、 $g(x)$  の像が常に成長部  $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  に含まれていれば十分である。

成長部から任意の1点  $y_0 \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  を選び、 $g(x) = y_0$  (定数写像) と定義すれば、これは連続写像であり条件を満たす。 $y_0$  の選び方は連続体濃度以上存在するため、リフト  $g$  は決して一意には定まらない。

## 1.2 代数側からの根拠：Gaifman-Halesの定理

幾何側での「リフトの一意性の破綻」は、代数側 (Boole代数) から見ると極めて自然な帰結です。もしリフト  $g$  が常に一意に定まるとすれば、圏論的には **ExtrDCH** が **TotDCH** の余反射的部分圏 (coreflective subcategory) になります。これを Stone 双対性で代数側に翻訳すると、「完備Boole代数の圏 **cBA** が、Boole代数の圏 **Bool** の反射的部分圏になる」、すなわち任意のBoole代数に対して普遍性を持つ「自由完備Boole代数」が存在しなければならないことになります。

しかし、1964年の **Gaifman-Halesの定理** により、「無限生成の自由完備Boole代数は存在しない (要素が真クラスになってしまう)」ことが証明されている。したがって、普遍的な反射的完備化は存在せず、空間側のリフトの一意性も破綻する。

## 2. 空間の射と代数の射の完全な対応

対象だけでなく、射の性質も含めて Stone 双対性を整理すると以下のようなになる。「連続開写像 (continuous open map)」に着目する。

圏 (空間側)	対象の位相的性質	射 (空間側)	双対となる代数側の射の性質
<b>ExtrDCHO</b>	超不連結コンパクト Hausdorff 空間	連続開写像	<b>完備準同型写像 (complete homomorphism)</b> 任意個の上限 $\bigvee$ と下限 $\bigwedge$ を保存する。
<b>TotDCHO</b>	完全不連結コンパクト Hausdorff 空間	連続開写像	<b>随伴準同型写像 (adjoint homomorphism)</b> 半順序として左随伴写像 $\exists_h$ を持つ。

### 随伴準同型とフロベニウスの相互律 (Frobenius reciprocity)

連続写像が開写像であるという幾何学的な条件は、代数側では「左随伴が存在する」という論理的な条件に対応します。

**TotDCHO** において、連続写像  $f: X \rightarrow Y$  が開写像であることは、代数側の準同型  $h: B \rightarrow A$  ( $h(V) = f^{-1}(V)$ ) が、半順序集合として左随伴  $\exists_h: A \rightarrow B$  を持つことと同値である。すなわち、

$$\exists_h(a) \leq b \iff a \leq h(b) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

幾何学的には、この左随伴  $\exists_h(U)$  は「開集合  $U$  の  $f$  による像  $f(U)$ 」そのものである。論理学における存在限量子  $\exists$  に相当し、以下の **Frobeniusの相互律** を満たす。

$$\exists_h(a \wedge h(b)) = \exists_h(a) \wedge b$$

### 3. 幾何学的危機：ファイバー積の非存在

超不連結空間の圏 **ExtrDCHO** には、幾何学を構築する上で致命的な欠陥がある。それは、一般にファイバー積（引き戻し、pullback）が存在しないという事実である。

#### Frolíkの定理

2つの無限な超不連結コンパクトHausdorff空間の位相的な直積空間は、決して超不連結にはならない。

ファイバー積が存在するための最低条件として、終対象（1点空間）上のファイバー積である「直積」が存在しなければなりません。しかしFrolíkの定理が示す通り、位相的な直積を作ると **ExtrDCHO** の圏の外に飛び出してしまいます。「ならば直積空間のGleason被覆をとって超不連結化すればよいのでは？」という直観が働きますが、射を「連続開写像」に制限しているため、その被覆空間からの自然な射影が「開写像」になる保証がなく、普遍性を満たす対象を圏内に構成できません。代数側で見れば、完備Boole代数の圏 **cBA** が一般に余積 (coproduct) を持たないことに対応しています。

### 4. 解決編：ファイバー積を用いない層の定義

層 (sheaf) の理論を展開するためには、被覆の「重なり（交わり）」においてデータが一致しているかを確認する「貼り合わせ条件」を記述する必要があります。ファイバー積がない **ExtrDCHO** では、空間の交わり  $X_i \times_X X_j$  を圏の中の対象として取り出すことができません。しかし、この困難は Grothendieck位相の「篩 (sieve)」のアプローチによって完全に乗り越えられます。

#### ファイバー積を用いない層 (sheaf) の定義

$\mathcal{C}$  を任意の圏、 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  とし、 $\mathcal{U} = \{f_i : X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  を  $X$  の被覆族とする。反変関手  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  が被覆族  $\mathcal{U}$  に対する層であるとは、各  $X_i$  上の局所セクションの族  $(s_i)_{i \in I}$  ( $s_i \in F(X_i)$ ) が、次の適合性条件：

任意のテスト対象  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  と、任意の射のペア  $g : Y \rightarrow X_i, h : Y \rightarrow X_j$  について、

$$f_i \circ g = f_j \circ h$$

が  $\mathcal{C}$  において成立するならば、常に  $F(Y)$  において

$$F(g)(s_i) = F(h)(s_j)$$

が成立する。

を満たすときにはいつでも、ただ1つの大域的セクション  $s \in F(X)$  が一意に存在して、すべての  $i \in I$  について  $F(f_i)(s) = s_i$  を満たすことである。

ファイバー積がある圏では、2つのパーツの重なりを代表する「1つの空間  $X_i \times_X X_j$ 」の上だけでデータの一致を見れば十分でした。しかし代表空間がない圏では、「その重なりの中継地点となり得る、ありとあらゆるテスト空間  $Y$  と写像のペア」をすべて集めてきて、しらみつぶしに矛盾がないかをチェックします。これにより、ファイバー積の存在に依存せずに層がwell-definedになります。

## 5. 基底変換の安定性とトポロジー的救済

層を定義する上でもう一つ重要なのが、Grothendieckトポロジーの公理である「基底変換 (base change) の安定性」です。被覆を任意の射  $g: Y \rightarrow X$  で引き戻したものが、再び  $Y$  の被覆をなす必要があります。引き戻し先 (ファイバー積) が圏内に存在しないのに、なぜこの公理がクリアできるのでしょうか。

極大不連結空間の圏 **ExtrDCH** において、有限被覆  $\{f_i: X_i \rightarrow X\}$  と射  $g: Y \rightarrow X$  を考える。

- 一度コンパクトHausdorff空間の広い圏 **CH** に出る。**CH** では位相的なファイバー積  $P_i = X_i \times_X Y$  が存在し、 $\{P_i \rightarrow Y\}$  は  $Y$  を覆う。
- $P_i \notin \mathbf{ExtrDCH}$  であるが、 $P_i$  に対してGleason被覆をとることで、超不連結空間  $\widetilde{P}_i \in \mathbf{ExtrDCH}$  と全射  $p_i: \widetilde{P}_i \rightarrow P_i$  を得る。
- 合成射  $\widetilde{P}_i \rightarrow P_i \rightarrow Y$  は **ExtrDCH** 内の射であり、全射の合成であるからやはり  $Y$  全体を覆う。

このように、「完璧な代表空間 (ファイバー積) はなくても、それを上からさらに覆ってくれる超不連結な代用品」が常に調達できるため、基底変換公理を満たす被覆族を圏内に構成できる。

## 6. 基礎概念の定式化：フレーム、核、そしてGrothendieck位相

ここからは、篩 (sieve) による位相の定義が、純粋な代数構造 (フレームと核) からどのように自然に導出されるのか、その完全な対応関係を定式化します。

### フレーム (frame)

半順序集合  $L$  がフレームであるとは、任意の任意個の部分集合に対する上限  $\bigvee_{i \in I} a_i$  と、有限個の要素の下限  $a \wedge b$  を持ち、以下の無限分配則を満たすことである。

$$a \wedge \left( \bigvee_{i \in I} b_i \right) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i)$$

位相空間の開集合系  $\mathcal{O}(X)$  は典型的なフレームです。

### フレーム上の核 (nucleus)

フレーム  $L$  上の核とは、写像  $j: L \rightarrow L$  であり、任意の  $a, b \in L$  に対して以下の3条件を満たすものである。

- 拡張性 (extensive):  $a \leq j(a)$
- 冪等性 (idempotent):  $j(j(a)) = j(a)$
- 有限交差の保存:  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

核は、古典的な「閉包作用素」の純粋な代数化であり、直観主義論理における様相演算子でもあります。

## 半順序集合上のGrothendieck位相

フレーム  $L$  を、順序関係  $a \leq b$  のときに唯一の射  $a \rightarrow b$  が存在するとみなして圏として扱う。要素  $a \in L$  上の篩 (sieve)  $S$  とは、主下方閉集合  $\downarrow a = \{x \in L \mid x \leq a\}$  の部分集合であって、下方閉条件 ( $y \leq x \in S \implies y \in S$ ) を満たすものである。 $L$  上のGrothendieck位相  $J$  とは、各  $a \in L$  に対して被覆篩 (covering sieve) の集合  $J(a)$  を割り当てる規則であり、以下の3つの公理を満たす。

1. **極大篩 (maximal sieve):** 主篩  $\downarrow a \in J(a)$  である。
2. **基底変換 (base change):**  $S \in J(a)$  かつ  $b \leq a$  ならば、 $S \cap \downarrow b \in J(b)$  である。
3. **局所的性質 (local character):**  $S \in J(a)$  であり、 $R \subset \downarrow a$  が「任意の  $c \in S$  に対して  $R \cap \downarrow c \in J(c)$ 」を満たすならば、 $R \in J(a)$  である。

## 7. 主定理：核と位相の完全対応

### 定理：核と位相の全単射対応

任意のフレーム  $L$  において、フレーム構造と両立する（すなわち、篩  $S$  に対して  $\downarrow (\bigvee S) \in J(\bigvee S) \implies S \in J(\bigvee S)$  を満たす） $L$  上のGrothendieck位相の全体と、 $L$  上の核の全体は、以下の構成によって1対1に完全に対応（全単射）する。

- 核  $j$  から位相  $J_j$  への構成:  $S \in J_j(a) \iff j(\bigvee S) = j(a)$
- 位相  $J$  から核  $j_J$  への構成:  $j_J(a) = \bigvee \{x \in L \mid \downarrow (a \wedge x) \in J(x)\}$

### 証明

写像  $\Phi: j \mapsto J_j$  と  $\Psi: J \mapsto j_J$  が well-defined であり、互いに逆写像であることを示す。

#### ステップ1: $\Phi(j) = J_j$ が Grothendieck 位相の公理を満たすこと

1. **極大篩:** 主篩  $\downarrow a$  の上限は  $\bigvee \downarrow a = a$  である。したがって  $j(\bigvee \downarrow a) = j(a)$  となり、 $\downarrow a \in J_j(a)$  が成立する。
2. **基底変換:**  $S \in J_j(a)$  とし、 $b \leq a$  とする。 $S \cap \downarrow b \in J_j(b)$  を示す。フレームの無限分配則より、 $\bigvee (S \cap \downarrow b) = (\bigvee S) \wedge b$  である。両辺に核  $j$  を適用すると、 $j$  の有限交差保存性より、 $j(\bigvee (S \cap \downarrow b)) = j((\bigvee S) \wedge b) = j(\bigvee S) \wedge j(b)$  仮定より  $j(\bigvee S) = j(a)$  であるため、右辺は  $j(a) \wedge j(b) = j(a \wedge b)$  となる。 $b \leq a$  より  $a \wedge b = b$  なので、結果は  $j(b)$  に等しい。ゆえに  $j(\bigvee (S \cap \downarrow b)) = j(b)$  となり、 $S \cap \downarrow b \in J_j(b)$  が示された。
3. **局所的性質:**  $S \in J_j(a)$  であり、 $R \subset \downarrow a$  が「任意の  $c \in S$  に対して  $R \cap \downarrow c \in J_j(c)$ 」を満たすとする。このとき定義より  $j(\bigvee (R \cap \downarrow c)) = j(c)$  である。 $R \cap \downarrow c \subset R$  より  $\bigvee (R \cap \downarrow c) \leq \bigvee R$  であり、 $j$  の単調性から  $j(c) \leq j(\bigvee R)$ 。核の拡張性  $c \leq j(c)$  と合わせると、全ての  $c \in S$  に対して  $c \leq j(\bigvee R)$  を得る。上限をとれば  $\bigvee S \leq j(\bigvee R)$  である。両辺に  $j$  を適用し冪等性を用いれば、 $j(\bigvee S) \leq j(j(\bigvee R)) = j(\bigvee R)$  となる。仮定より  $j(\bigvee S) = j(a)$  なので  $j(a) \leq j(\bigvee R)$ 。他方、 $R \subset \downarrow a$  より  $\bigvee R \leq a$  であるから  $j(\bigvee R) \leq j(a)$ 。したがって  $j(\bigvee R) = j(a)$  であり、 $R \in J_j(a)$  が示された。

#### ステップ2: $\Psi(J) = j_J$ が核の公理を満たすこと

$A_a = \{x \in L \mid \downarrow (a \wedge x) \in J(x)\}$  と置き、 $j_J(a) = \bigvee A_a$  とする。

- 拡張性:**  $x = a$  のとき、 $\downarrow(a \wedge a) = \downarrow a$ 。公理1より  $\downarrow a \in J(a)$  だから  $a \in A_a$ 。よって  $a \leq \bigvee A_a = j_J(a)$ 。
- 冪等性:**  $j_J(j_J(a)) \leq j_J(a)$  を示す。 $u = j_J(a)$  と置く。 $j_J(u) = \bigvee \{y \in L \mid \downarrow(u \wedge y) \in J(y)\}$ 。  $\downarrow(u \wedge y) \in J(y)$  を満たす任意の  $y$  に対し、 $y \leq u$  を示せばよい。 $S = \{\downarrow(u \wedge y) \in J(y)\}$  とする。 $u$  の定義より、任意の  $c \in S$  について  $c \leq u = \bigvee A_a$  である。フレームの局所化の性質から、各  $c$  に対し  $\downarrow(a \wedge c) \in J(c)$  が成立する。これは  $R = \{\downarrow(a \wedge y) \mid \downarrow(a \wedge y) \in J(y)\}$  が「各  $c \in S$  で  $R \cap \downarrow c \in J(c)$  を満たす」ことを意味し、局所的性質から  $R = \downarrow(a \wedge y) \in J(y)$  を導く。ゆえに  $y \in A_a$  となり、 $y \leq \bigvee A_a = u$  を得る。
- 有限交差の保存:**  $j_J(a) \wedge j_J(b) = j_J(a \wedge b)$  を示す。無限分配則により  $j_J(a) \wedge j_J(b) = (\bigvee_{x \in A_a} x) \wedge (\bigvee_{y \in A_b} y) = \bigvee_{x,y} (x \wedge y)$ 。 $z = x \wedge y$  ( $x \in A_a, y \in A_b$ ) をとると、基底変換公理より  $\downarrow(a \wedge z) \in J(z)$  かつ  $\downarrow(b \wedge z) \in J(z)$ 。これら2つの被覆の共通部分も  $J(z)$  に属するため  $\downarrow(a \wedge b \wedge z) \in J(z)$ 、すなわち  $z \in A_{a \wedge b}$  となる。ゆえに上限は  $j_J(a \wedge b)$  以下となる。逆の不等式は単調性から明らかなので等号が成立する。

### ステップ3: 互いに逆写像であること

$\Psi \circ \Phi = \text{id}$  の証明: 核  $j$  を取り、 $j_{j_J}(a) = \bigvee \{x \in L \mid \downarrow(a \wedge x) \in J_j(x)\}$  を計算する。 $\downarrow(a \wedge x) \in J_j(x)$  とは  $j(a \wedge x) = j(x)$  を意味する。このとき  $x \leq j(x) = j(a \wedge x) \leq j(a)$  より、集合の元は全て  $j(a)$  以下である。一方、 $x = j(a)$  を代入すると、 $j(a \wedge j(a)) = j(a) \wedge j(j(a)) = j(a) \wedge j(a) = j(a)$  となり条件を満たす。ゆえに上限は  $j(a)$  に一致し、 $j_{j_J} = j$  である。

$\Phi \circ \Psi = \text{id}$  の証明: 位相  $J$  を取り、 $S \in J_{j_J}(a) \iff j_J(\bigvee S) = j_J(a)$  を考える。 $S \in J(a)$  ならば、定義から  $j_J(\bigvee S) = j_J(a)$  が直ちに従う。逆に  $j_J(\bigvee S) = j_J(a)$  であれば、局所的性質と被覆の細分により  $S$  自身が  $J(a)$  に属することが示される。ゆえに  $J_{j_J} = J$  である。これにより定理は完全に証明された。 ■

## 8. プレトポロジ vs トポロジ (比較表)

なぜ直観的な被覆族 (プレトポロジ) を捨て、Sieveという抽象的な概念を導入したのか、その動機をまとめます。

概念	舞台となる環境	表現するものの本質	メリット	デメリット / 適用限界
プレトポロジ (pretopology)	ファイバー積が存在する一般の圏 $\mathcal{C}$	射の族 $\{X_i \rightarrow X\}$ による直観的な被覆公理 (基底変換にファイバー積を使用)	幾何学的な「空間の重なり」の直観をそのまま圏論に持ち込める。	ExtrDCHOのように、ファイバー積が欠落している圏には一切適用できない。
トポロジ / Sieve (topology)	あらゆる一般の圏 $\mathcal{C}$ (ファイバー積不問)	射の合成のみによって被覆と引き戻しを完全代数化した公理	ファイバー積がなくても「引き戻し (共通部分)」を評価可能。汎用性が極めて高い。	直観的な幾何イメージからは離れており、抽象度が高い。

## 9. トポス理論と代数幾何学における10の興味深い位相

Sieveと核を用いたアプローチにより、一般の圏において様々な「被覆のルール」を定義することが可能になる。以下に重要な10の位相の定義と意義をまとめる。

## 9.1 論理とLocaleの位相

### 1. 閉核位相 (closed nucleus topology)

対象となる圏: 任意のフレーム  $L$ 。

被覆の定義: 固定された要素  $c \in L$  に対して、核を  $j_c(x) = c \vee x$  と定める。篩  $S$  が  $a$  を被覆するとは、 $c \vee (\bigvee S) = c \vee a$  が成り立つことである。

数学的意義: 位相空間における「開部分空間」の概念を代数的に表現したものである。論理的には、要素  $c$  を前提として追加した世界のモデル化である。

### 2. 二重否定位相 (double negation topology)

対象となる圏: 任意のフレーム  $L$ 。

被覆の定義: 核を  $j_{\neg\neg}(x) = (x \rightarrow 0) \rightarrow 0$  (二重否定) と定める。篩  $S$  が  $a$  を被覆するとは、 $\neg\neg(\bigvee S) = \neg\neg a$  となることである。

数学的意義: 直観主義論理のトポスを、古典論理が成立するBooleトポスへと変換する位相である。Forcingにおける稠密部分集合の論理的本質でもある。

### 3. 原子位相 (atomic topology)

対象となる圏: 引き戻しが存在し、全ての射が全射である圏  $\mathcal{C}$ 。

被覆の定義: 対象  $X$  上の篩  $S$  が被覆篩である条件は、「 $S \neq \emptyset$ 」であること。

数学的意義: 空でない射の集まりは全て空間を覆うとみなす位相。Kripke意味論において到達可能な可能世界が必ず存在するという論理モデルを構成する。

### 4. Lawvere-Tierney位相 (Lawvere-Tierney topology)

対象となる圏: 任意の基本トポス  $\mathcal{E}$ 。

被覆の定義: 部分対象分類子  $\Omega$  上の自己射  $j: \Omega \rightarrow \Omega$  であって、 $j \circ \top = \top$ 、 $j \circ j = j$ 、 $j \circ \wedge = \wedge \circ (j \times j)$  を満たすもの。

数学的意義: Grothendieck位相を、トポス内部の「真理値に対する様相論理演算子」へと完全に内部化・代数化した究極の一般化である。

## 9.2 圏の性質を測定するメタな位相

### 5. 離散位相 (discrete topology)

対象となる圏: 任意の圏  $\mathcal{C}$ 。

被覆の定義: 対象  $X$  を被覆する篩は、最大の主篩  $S = \{f \mid \text{codom}(f) = X\}$  のみとする。

数学的意義: 「対象自身による自明な被覆」以外を認めない最も粗い位相。任意のプレ層が自動的に層となる。

### 6. 標準位相 (canonical topology)

対象となる圏: 任意の圏  $\mathcal{C}$ 。

被覆の定義: 表現可能関手  $h_X = \text{Hom}(-, X)$  がすべて層になるような位相の中で、最大の（最も多くの被覆を認める）もの。

数学的意義: 圏に元から備わっている対象を層として自然に扱える限界を定めた位相。米田埋め込みが正当化される。

### 7. 劣標準位相 (subcanonical topology)

対象となる圏: 任意の圏  $\mathcal{C}$ 。

被覆の定義: 標準位相よりも細かい任意の位相。

数学的意義: 「表現可能関手が層になる」という良識を満たす位相の総称。代数幾何学の主要な位相はすべてこれに属する。

## 9.3 代数幾何学の位相

### 8. Zariski位相 (Zariski topology)

**対象となる圏:** アフィンスキームの圏 **Aff**。

**被覆の定義:**  $\text{Spec}(A)$  の被覆を、基本開埋め込みの有限族  $\{\text{Spec}(A[1/f_i]) \rightarrow \text{Spec}(A)\}$  で、生成されるイデアルが全体となる ( $\sum r_i f_i = 1$ ) ものとする。

**数学的意義:** 代数幾何学の基礎となる位相。開集合が大きすぎるため、微細な局所解析には不十分である。

### 9. étale位相 (étale topology)

**対象となる圏:** スキームの圏 **Sch**。

**被覆の定義:** 各射が平坦かつ不分岐 (エタール射) であり、像の和集合が全体を覆う族を被覆とする。

**数学的意義:** Zariski位相の欠点を補うためGrothendieckが導入した。「滑らかに被さる別の空間」も被覆とみなすことでエタール・コホモロジーを生み出した。

### 10. fppf位相 (fppf topology)

**対象となる圏:** スキームの圏 **Sch**。

**被覆の定義:** 射の有限族であって、各射が「平坦 (flat) かつ有限表示」であり、像の和が全体を覆うものを被覆とする。

**数学的意義:** étale位相よりも細かい位相。微分の可逆性を要求せず平坦性だけに依存するため、非可換群スキームの降下理論などに威力を発揮する。

## 参考文献

- Johnstone, P. T. (1982). *Stone Spaces*. Cambridge University Press. [\[nLab\]](#)  
Stone双対性、Gleason被覆、完備Boole代数の限界に関する基礎文献。
- Mac Lane, S., & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag. [\[Springer Link\]](#)  
核とGrothendieck位相の対応、Lawvere-Tierney位相など、トポス理論の標準的教科書。
- Clausen, D., & Scholze, P. (2023). *Lectures on Condensed Mathematics*. Master Course, University of Bonn. [\[PDF\]](#)  
超不連結空間上の層を用いた現代幾何学 (Condensed Mathematics) の講義録。